

浙江海洋大学 2023-2024 学年第 一 学期

《高等数学 A1》课程期末模拟卷

(适用班级 A23 计算机 1、2, B23 物理 2)

考试时间: 95 分钟

一	二	三	四	五	六	七	总分

一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x$ 与 $x^3 + ax$ 为等价无穷小, 则 $a =$ _____.
2. 设 $y = f(\sin x)$, 且 $f''(x)$ 存在, 则 $y'' =$ _____.
3. 设 $y = f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ ax, & x \geq 0. \end{cases}$ 若 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 都存在, 则 $a =$ _____.
4. 若 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln x$, 则 $\int f'(x)dx =$ _____.
5. $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x dx =$ _____.

二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 设 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$, 则 $x = 1$ 是 $f(x)$ 的 ().
A. 可去间断点 B. 跳跃间断点 C. 第二类间断点 D. 连续点
2. 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 且 $x_0 \in (a, b)$, 则在 x_0 处 ().
A. $f(x)$ 的极限存在, 且可导 B. $f(x)$ 的极限存在, 但不一定可导
C. $f(x)$ 的极限不存在, 但可导 D. $f(x)$ 的极限不一定存在
3. 设 a, b 是方程 $f(x) = 0$ 的两个根, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 则 $f'(x) = 0$ 在 (a, b) 内 ().
A. 只有一个跟 B. 至少有一个根 C. 无根 D. 至少有二个根
4. 若 $f(x)$ 是连续函数, 则 $\int_0^1 f(\sqrt{1-x})dx =$ ().
A. $-2 \int_0^1 xf(x)dx$ B. $2 \int_0^1 xf(x)dx$ C. $-\frac{1}{2} \int_0^1 f(x)dx$ D. $\frac{1}{2} \int_0^1 f(x)dx$

学号 _____ 姓名 _____ 班级 _____ 专业 _____ 学院 _____

线 订 装

5、 $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ ($a > 0$) ()

- A. $p=1$ 时收敛 B. $p>1$ 时收敛 C. $p\geq 1$ 时发散 D. $p<1$ 时收敛

三、求下列函数的极限（每小题 5 分，共 20 分）

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{2}{x})^{3x}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln(\cos t) dt}{x^3}$

四、求下列函数的导数或微分（每小题 5 分，共 15 分）

1、 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $x - y + \frac{1}{2} \sin y = 0$ 所确定,求 $\frac{dy}{dx}$

2. 设 $y = 3^{\tan x^2}$, 求 dy

3. 已知 $\begin{cases} x = t + \arctan t \\ y = t^3 + 6t \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$

五、求下列不定积分或定积分（每小题 5 分，共 20 分）

1. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+2}}$

2. $\int \ln x dx$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx$

4. 求 $\int_0^2 f(x-1)dx$, 其中 $f(x) = \begin{cases} e^{2x}, & x < 0 \\ \frac{1}{1+x}, & x \geq 0 \end{cases}$

六、（8 分）设由抛物线 $y = 4x^2$ 和直线 $x = a$ ， $x = 2$ 及 $y = 0$ 所围成的平面图形为 D_1 ，由抛物线 $y = 4x^2$ 和直线 $x = a$ ， $x = 0$ 及 $y = 0$ 所围成的平面图形为 D_2 ，其中 $0 < a < 2$ 。

(1) 试求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1 ， D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V_2 ；

(2) 问当 a 为何值时， $V_1 + V_2$ 取得最大值？试求此最大值。

七、（7 分）设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在 $(0, 1)$ 内可导，且 $f(1) = 0$ 。证明存在 $\xi \in (0, 1)$ ，使得 $f'(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\xi}$ 。